DS de mathématiques n°12

Probabilité, Séries

Durée : **2h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté du raisonnement et la lisibilité de la copie pourront faire varier la note de ± 1 point.

Exercice 1 : Nature de séries

1) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}+\ln n}{n^2+2n}$.

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)^\alpha}$. On s'intéresse à la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$.

a) Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)^\alpha}$, définie sur $]1, +\infty[$.

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=3}^{N} u_n$ pour tout entier $N \geq 3$.

c) On suppose $\alpha = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ diverge. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ si $\alpha < 1$.

d) On suppose $\alpha > 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

Exercice-Problème 2 : Le forain ingénieux

Soit n un entier naturel non nul. Dans une fête foraine, Tobias propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de pile obtenus. Si ce nombre de piles est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.

Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque pile obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque pile obtenu. En particulier, s'il n'obtient aucun pile, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à p (avec $p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir face est de $1 - p$.

On notera X la variable aléatoire égale au nombre de pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain (en euros) du joueur. Enfin, on notera A l'événement : « le joueur est déclaré vainqueur » et on dira que le jeu est favorable au joueur si $\mathbb{E}(G) > 0$.

Partie I. Dans cette partie, on suppose que $\boxed{n = 3}$ et $\boxed{p = \dfrac{2}{3}}$.

1) Reconnaître la loi de X et vérifier que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{13}{27}$.

2) Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.

3) Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II. Tobias constate que son jeu n'est pas attractif car les joueurs se rendent compte que $\mathbb{P}(A) < \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'ils ont plus de chances de perdre que de gagner.

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$. Tobias cherche les conditions sur p et n pour qu'il puisse mettre un affichage « à ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants ! », et ce sans que ce soit mensonger car Tobias est un honnête homme.

4) Dans la suite, on pose Y la variable aléatoire définie par $Y = (-1)^X$.

a) On note $Z = \dfrac{Y+1}{2}$. Montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

b) Démontrer que $\mathbb{E}(Y) = 2\mathbb{P}(A) - 1$.

5) Donner la loi de X et en déduire que $\mathbb{E}(Y) = (1-2p)^n$.

6) Exprimer alors la valeur de $\mathbb{P}(A)$ en fonction de n et p.

7) Démontrer que :

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ ou } n \text{ est pair}\right]$$

Partie III. Tobias souhaite cependant s'assurer que, tout en laissant son jeu attractif (c'est-à-dire en faisant en sorte que $\mathbb{P}(A) \geq \dfrac{1}{2}$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(G) \leq 0$).

8) Exprimer G en fonction de X. En déduire que :

$$\mathbb{E}(G) = 10\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\mathbb{P}(X=k)$$

9) Démontrer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

10) Montrer que :

$$\mathbb{E}(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$$

11) Démontrer alors que :

$$\left(\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(G) \leq 0\right) \iff p \leq \frac{1}{2}$$

12) **a)** Étudier la fonction $f : x \mapsto x(1-2x)^{n-1}$ sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

b) Pour une valeur de n fixée, comment Tobias doit-il truquer sa pièce, c'est-à-dire quelle valeur doit-il donner à $p \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, pour optimiser la rentabilité de son activité ? Que vaut alors $\mathbb{E}(G)$ pour cette valeur de p ?

– Commissaire, on a cambriolé le mathématicien !
– Pas de traces des fractions ?
– Non, mais le voleur a pris la tangente.
– Il népérien pour attendre !